Számelmélet
Megoldások

1) Az 52941 számjegyeit leírjuk az összes lehetséges sorrendben.

a) Az 52941 számmal együtt hány ötjegyű számot kapunk? (2 pont)

b) Ezen számok közül hány osztható 12-vel? (6 pont)

c) Bizonyítsa be, hogy e számok egyik sem négyzetszám! (4 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 21. feladat*

b) Egy egész szám pontosan akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel is (1 pont)

Az ötjegyű számok mindegyike osztható 3-mal, mert a számjegyek összege mindegyiknél 21, ami osztható 3-mal (1 pont)

4-gyel ezen ötjegyű számok közül azok oszthatók, amelyek utolsó két számjegye a következő: 12; 52; 92; 24 (1 pont)

Az ötjegyű számban az első három számjegyből álló szám hatféle lehet, ha az utolsó kettőt rögzitettük (2 pont)

így az ötjegyű számok között $4 \cdot 6 = \mathbf{24}$ db 12-vel osztható szám van (1 pont)

c) Az ötjegyű számok mindegyikében a számjegyek összege 21 (1 pont)

Tehát a számok oszthatók 3-mal (1 pont)

Mivel 3-mal oszthatóak, ezért csak abban az esetben lehetne köztük négyzetszám, ha az 3 valamely páros kitevőjű hatványa lenne. Ehhez feltétlenül szükséges az is, hogy 9-cel osztható legyen, 9-cel viszont nem osztható egyik sem, **így egyik szám sem lehet négyzetszám.** (2 pont)

Összesen: 12 pont

2)

a) Hány olyan tízjegyű pozitív szám van, amelynek minden számjegye a $\{0;8\}$ halmaz eleme? (3 pont)

b) Írja fel 45-nek azt a legkisebb pozitív többszörösét, amely csak a 0 és 8-as számjegyeket tartalmazza! (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Kombinatorika 14. feladat*

b) Egy szám akkor és csak akkor osztható 45-tel, ha 5-tel és 9-cel is osztható (2 pont)

Mivel a keresett szám 5-tel osztható, ezért csak 0-ra végződhet (1 pont)

Egy (pozitív egész) szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha a számjegyek összege osztható 9-cel (1 pont)

Csak 0 és 8 számjegyeket tartalmazó egész szám esetén ehhez legalább 9 darab 8-as számjegy kell (1 pont)

A legkisebb (pozitív) többszöröshöz pontosan 9 darab 8-as számjegyre van szükség (1 pont)

tehát a keresett szám **8 888 888 880** (1 pont)

Összesen: 10 pont

3) Két valós szám összege 29. Ha az egyikből elveszünk 15-öt, a másikhoz pedig hozzáadunk 15-öt, az így kapott két szám szorzata éppen ötszöröse lesz az eredeti két szám szorzatának. Melyik lehet ez a két szám? (13 pont)

Megoldás:

Jelölje x azt a számot, amelyet 15-tel csökkentünk, y pedig a másikat

$$\left.\begin{aligned} x+y=29 \\ (x-15)\cdot(y+15)=5xy \end{aligned}\right\}$$ (2 pont)

Az első egyenletből például y-t kifejezve és a második egyenletbe behelyettesítve: $(x-15)\cdot(29-x+15)=5x(29-x)$ (1 pont)

A műveleteket elvégezve:

$-x^2+59x-660=145x-5x^2$ (3 pont)

Rendezve: $4x^2-86x-660=0$ (1 pont)

Az egyenlet megoldásai a -6 és a $27{,}5$ (2 pont)

Ha a 15-tel csökkentendő szám a $\mathbf{-6}$, akkor a másik szám a **35** (1 pont)

Ha a 15-tel csökkentendő szám a **27,5**, akkor a másik szám a **1,5** (1 pont)

Ellenőrzés a szöveg alapján:

Ha a két szám a -6 és a 35, akkor az összegük 29, a szorzatuk -210

A megváltoztatott számok a -21 és az 50, ezek szorzata -1050, ami valóban az 5-szöröse a -210-nek (1 pont)

Ha a két szám a 27,5 és az 1,5, akkor az összegük 29, a szorzatuk 41,25.

A megváltoztatott számok a 12,5 és a 16,5, ezek szorzata 206,25, ami valóban 5-szöröse a 41,25-nek. (1 pont)

Összesen: 13 pont

4) Melyek azok a tízes számrendszerben kétjegyű természetes számok, amelyekben a számjegyek számtani és harmonikus közepének a különbsége 1? (16 pont)

Megoldás:

(Ha a keresett szám $10a+b$, akkor – mivel két szám számtani közepe nem kisebb a számok harmonikus közepénél – a feladat szövege szerint)

$\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}=1$ (ahol a és b nullától különböző számjegyek) (2 pont)

Ezt átalakítva: $(a-b)^2=2(a+b)$ (2 pont)

Mivel a és b számjegyek, ezért $(a-b)^2=2(a+b)\le 36$ (1 pont)

Mivel $2(a+b)$ páros, ezért $(a-b)^2$ is, tehát vagy mindkét számjegy páros vagy mindkettő páratlan. (1 pont)

Pozitív páros négyzetszám 36-ig három van: 4, 16 és 36, azaz vagy 2 vagy 4 vagy 6 a két számjegy különbsége. (1 pont)

I) $|a-b|=2$

Ekkor $4=2(a+b)\Rightarrow 2=a+b$ (1 pont)

(Mivel mindkettő 0-nál nagyobb egész, ezért) csak $a=1$, $b=1$ lehetne, ekkor viszont a számtani és harmonikus közép egyenlő, tehát ezen az ágon nincs megfelelő szám. (1 pont)

II) Ha $|a-b|=4$, akkor $a+b=8$ (1 pont)

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk:

$a=6$ és $b=2$ (1 pont)

vagy $a=2$ és $b=6$. (1 pont)

III) $|a-b|=6$

Ekkor $36=2(a+b) \Rightarrow 18=a+b$ (1 pont)

(Mivel mindkettő 10-nél kisebb egész, ezért) csak $a=9$, $b=9$ lehetne, ekkor viszont a számtani és harmonikus közép egyenlő, tehát ezen az ágon sincs megfelelő szám. (1 pont)

Mivel csak a II) esetben kaptunk megoldást, ezért a megfelelő számok a **26** és a **62**. (1 pont)

Ellenőrzés: a 2 és a 6 számtani közepe 4, harmonikus közepe 3, tehát megfelelnek a feladat feltételeinek. (1 pont)

Összesen: 16 pont

5)

a) Egy téglalapot 720 darab egybevágó kis téglalapra daraboltunk szét. A kis téglalapok oldalai közül az egyik 1 cm-rel hosszabb, mint a másik. Hány cm hosszúak egy-egy kis téglalap oldalai, ha a nagy téglalap területe 2025 cm²? (7 pont)

b) Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből összesen 720 olyan hatjegyű szám képezhető, melynek számjegyei között nincsenek egyenlők. Ezek között hány 12-vel osztható van. (5 pont)

<u>Megoldás:</u>

a) *Lásd: Síkgeometria 20. feladat*

b) 12-vel azok a természetes számok oszthatók, amelyek 3-mal és 4-gyel is oszthatók. (1 pont)

Mivel $1+2+3+4+5+6=21$, ezért mind a 720 különböző hatjegyű szám osztható 3-mal. (1 pont)

Azok a hatjegyű számok oszthatók 4-gyel, amelyeknél az utolsó két számjegy 12, 16, 24, 32, 36, 52, 56 vagy 64. (1 pont)

Mindegyik végződés 4!, azaz 24 darab hatjegyű szám esetében fordul elő. (1 pont)

Emiatt a vizsgált számok között $8 \cdot 24 = \mathbf{192}$ darab 12-vel osztható van. (1 pont)

Összesen: 12 pont

6) Adott síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y=3x^2-x^3$ egyenletű görbe.

a) Igazolja, hogy ha $x \in]0;3[$, akkor $y>0$. (4 pont)

b) Írja fel a görbe 3 abszcisszájú pontjában húzható érintőjének egyenletét! (abszcissza: első koordináta) (5 pont)

c) Számítsa ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a görbe első síknegyedbe eső íve és az x tengely fog közre! (5 pont)

<u>Megoldás:</u>

a) $3x^2-x^3=x^2\cdot(3-x)$ (1 pont)

Az x^2 tényező pozitív, mert $x \neq 0$. (1 pont)

A $3-x$ tényező is pozitív, mert $x<3$, (1 pont)

Így a két tényező szorzata is pozitív, ha $x \in]0;3[$. (1 pont)

b) *Lásd: Függvények - Analízis 23. feladat*

c) *Lásd: Függvények - Analízis 23. feladat*

Összesen: 14 pont

7) a) Ha $a \mid b$ igaz, akkor $a \mid b^2$ is teljesül (a és b pozitív egész számok). Fogalmazza meg a fenti (igaz) állítás megfordítását, és állapítsa meg a megfordítás logikai értékét is! Válaszát indokolja! ($a \mid b$ azt jelenti, hogy az a egész szám osztója a b egész számnak.) **(3 pont)**

b) Hány olyan n pozitív egész szám van, amelyhez létezik olyan p (pozitív) prímszám, amelyre az $n^2 - pn$ különbség is egy (pozitív) prímszámmal egyenlő? **(7 pont)**

Egy lapra 10 pontot rajzoltunk, majd ezeket megszámoztuk 1-től 10-ig. Ezután minden egyes pontot egy-egy vonallal „összekötünk" a lapon szereplő összes olyan ponttal, amelyhez írt szám a kiválasztott ponthoz írt számnak osztója. (Például azt a pontot, amelyhez a 6-ot írtuk, összekötöttük mind a négy ponttal, amelyhez a 6 valamelyik osztóját írtuk.)

c) Igazolja, hogy az így kapott 10 csúcsú gráf nem egyszerű gráf! **(2 pont)**

d) Igazolja, hogy a gráf éleinek száma páratlan! **(4 pont)**

Megoldás:

a) *Lásd: Bizonyítások 17. feladat*

b) $n^2 - pn = n(n-p)$ (1 pont)

Ez a szorzat csak akkor lehet prím, ha az egyik tényező 1, a másik pedig prím. (1 pont)

($n - p < n$, ezért) $n - p = 1$ és n prím. (1 pont)

Mivel $n = p + 1$, így két szomszédos prímszámot (p és $p+1$) keresünk. (2 pont)

(Mivel ekkor az egyik közülük páros, ezért) csak egy ilyen számpár van: a 2 és a 3 (tehát $p = 2$). (1 pont)

Tehát **egyetlen olyan pozitív egész n szám van** $(n = 3)$, amely eleget tesz a követelményeknek. (1 pont)

c) *Lásd: Gráfelmélet 7. feladat*

d) *Lásd: Gráfelmélet 7. feladat*

Összesen: 16 pont

8) A pozitív páratlan számokat „háromszög" alakban rendezzük el a következők szerint: az első oszlopba írjuk az első páratlan számot, a második oszlopba a következő kettőt, a harmadik oszlopba a következő hármat, és így tovább. Például az ötödik oszlop negyedik helyén a 27 áll (lásd az ábrát is).

1	3	7	13	21
	5	9	15	23
		11	17	25
			19	27
				29

a) Hányadik oszlop hányadik helyén áll a 99? **(3 pont)**

b) Határozza meg a 2017. oszlopban álló első számot! **(4 pont)**

c) Igazolja, hogy az n-edik oszlopban álló számok összege $n^3 \left(n \in \mathbb{Z}^+\right)$. **(9 pont)**

Megoldás:

a) A 99 az 50. páratlan szám. (1 pont)

Az első 9 oszlopban összesen $(1 + 2 + \ldots + 9 =)45$ szám van, (1 pont)

ezért a 99 a **10. oszlop 5. helyén** áll. (1 pont)

b) Az első 2016 oszlopban $1+2+3+...+2016=$ (1 pont)

$=\frac{2017\cdot 2016}{2}=2033136$ darab szám van. (1 pont)

(A k-adik páratlan szám értéke $2k-1$ $\left(k\in\mathbb{Z}^{+}\right)$, ezért) a 2017. oszlop első száma a 2033137. páratlan szám, (1 pont)
ami a $2\cdot 2033137-1=\mathbf{4066273}$. (1 pont)

c) *Lásd: Bizonyítások 18. feladat*

Összesen: 16 pont

9) a) Határozza meg a c számjegy lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy $\overline{lc28}$ nem osztható 6-tal, $\overline{93c6}$ nem osztható 36-tal, $\overline{c3c5}$ pedig nem osztható 15-tel! ($\overline{pqrs}$ azt a négyjegyű számot jelöli, melynek első számjegye *p*, további számjegyei pedig rendre *q*, *r*, és *s*.) (7 pont)

a) Igazolja, hogy nincs olyan *n* pozitív egész szám, amelyre 4^n+6n-1 osztható 8-cal! (2 pont)

b) Igazolja (teljes indukcióval vagy más módszerrel), hogy 4^n+6n-1 minden *n* pozitív egész szám esetén osztható 9-cel! (7 pont)

Megoldás:

a) c kezdőszámjegy (a $\overline{c3c5}$-ben), ezért $c\neq 0$. (1 pont)

$\overline{lc28}$ (mindig páros, ezért) 6-tal akkor nem osztható, ha 3-mal nem osztható, tehát ha a számjegyeinek összege nem osztható 3-mal: $c\notin\{1;4;7\}$. (1 pont)

$\overline{93c6}$ akkor osztható 36-tal, ha 4-gyel és 9-cel is osztható. (1 pont)
9-cel akkor osztható, ha a számjegyek összege osztható 9-cel, ez ($c=0$ kizárása után csak) $c=9$ esetén teljesül. (1 pont)
Ekkor azonban 9396 osztható 4-gyel is, ezért $c\neq 9$. (1 pont)

$\overline{c3c5}$ mindig osztható 5-tel, ezért 15-tel akkor nem osztható, ha 3-mal nem osztható, tehát ha a számjegyeinek összege nem osztható 3-mal: $c\notin\{2;5;8\}$.

(1 pont)

Így a megfelelő értékek: $\mathbf{c=3}$ és $\mathbf{c=6}$. (1 pont)

b) *Lásd: Bizonyítások 20. feladat*

c) *Lásd: Bizonyítások 20. feladat*

Összesen: 16 pont

10) Egy adatsokaság hét pozitív egész számból áll. Az adatsokaságnak két módusza van, a 71 és a 75. Az adatsokaság mediánja 72, az átlaga 73, a terjedelme pedig 7.

a) Határozza meg a hét számot! (7 pont)

A 72-nek és az *n* pozitív egész számnak a legkisebb közös többszöröse 27720.

b) Határozza meg az *n* lehetséges értékeinek számát, és adja meg az *n* legkisebb lehetséges értékét! (6 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Statisztika 16. feladat*

b) $72=2^3\cdot 3^2$ és $27\,720=2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11$. (2 pont)

A legkisebb közös többszörös definíciója miatt, $n=2^k\cdot 3^m\cdot 5\cdot 7\cdot 11$ alakban írható fel, (1 pont) ahol $k \in \{0;1;2;3\}$ és $m \in \{0;1;2\}$. (1 pont)

Az n lehetséges értékeinek száma tehát $4 \cdot 3 = 12$. (1 pont)

Az n legkisebb lehetséges értéke $\left(2^0 \cdot 3^0 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 =\right)$**385**. (1 pont)

Összesen: 13 pont

11) a) Egy mértani sorozat negyedik tagja 12, a kilencedik tagja 384. Számítsa ki a sorozat első hat tagjának az átlagát, és az átlagtól mért átlagos abszolút eltérését! (6 pont)

b) Hány olyan pozitív szám van, amelynek összege és szorzata is 12? (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 28. feladat*

b) A 12 háromféleképpen állítható elő 1-nél nagyobb számjegyek szorzataként: $12 = 6 \cdot 2 = 4 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 2$ (1 pont)

A számjegyek összege akkor lesz 12, ha ezen számjegyek mellett még megfelelő számú 1-es számjegyet tartalmaz a szám. Tetszőleges számú 1-es hozzávételével a számjegyek szorzata továbbra is 12 marad. (1 pont)

Olyan szám, amely 1 db 6-ost, 1 db 2-est, valamint $12 - 6 - 2 = 4$ db 1-est tartalmaz, $6 \cdot 5 = 30$ db van. (A 6-ost hat helyre tehetjük, a 2-est a fennmaradó 5 hely bármelyikére.) (1 pont)

Olyan szám, amely 1 db 4-est, 1 db 3-ast, valamint $12 - 4 - 3 = 5$ db 1-est tartalmaz, $7 \cdot 6 = 42$ ilyen van; (1 pont)

Olyan pedig, amely 2 db 2-est, 1 db 3-ast, valamint $12 - 2 \cdot 2 - 3 = 5$ db 1-est tartalmaz, $\binom{8}{2} \cdot 6 = 168$ db van. (2 pont)

Összesen tehát $30 + 42 + 168 =$ **240** olyan szám van, amely a feltételeknek megfelel. (1 pont)

Összesen: 13 pont

12) A *p*, *q*, *r* pozitív számok összege 180. Továbbá tudjuk, hogy $p : q = 7 : 8$ és $r : p = 5 : 3$.

a) Határozza meg ezeket a számokat! (6 pont)

A *H* halmaz az első 90 pozitív egész szám halmaza. *H*-ból véletlenszerűen kiválasztunk két különböző számot.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a két kiválasztott szám egy derékszögű háromszög (fokban mért) valamelyik két szöge! (7 pont)

Megoldás:

a) $p = \frac{7}{8}q$ és $r = \frac{5}{3}p = \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{8}q = \frac{35}{24}q$. (2 pont)

$p + q + r = \frac{7}{8}q + q + \frac{35}{24}q = \frac{80}{24}q = \frac{10}{3}q$ (1 pont)

$\frac{10}{3}q = 180, \Rightarrow q = \mathbf{54}$. (1 pont)

$p = \frac{7}{8} \cdot 54 = \frac{189}{4}(= \mathbf{47{,}25})$

$r = \frac{5}{3}p = \frac{315}{4}(= \mathbf{78{,}75})$ (2 pont)

d) *Lásd: Valószínűségszámítás 48. feladat*

Összesen: 13 pont

13) a) Hány olyan 90-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amely a 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható? (6 pont)

Az ötöslottó-játékban az első 90 pozitív egész számból kell öt különbözőt megjelölni. A sorsoláson öt (különböző) nyerőszámot húznak ki. (Sem a megjelölés, sem a kihúzás sorrendje nem számít.)

Kati a 7, 9, 14, 64, 68 számokat jelölte meg. A sorsoláson az első három kihúzott nyerőszám a 7, a 9 és a 14 volt. Kati úgy gondolja, hogy most nagy esélye van legalább négy találatot elérni.

b) Határozza meg annak a valószínűségét, hogy a hátralévő két nyerőszám közül Kati legalább az egyiket eltalálja! (6 pont)

Az egyik játékhéten összesen 3 222 831 lottószelvényt küldtek játékba a játékosok. Az alábbi táblázat mutatja a nyertes szelvények számát és nyereményét (2-nél kevesebb találattal nem lehet nyerni).

Találatok száma	Nyertes szelvények száma	Nyeremény (Ft/nyertes szelvény)
5	0	0
4	17	3 113 255
3	1617	34 915
2	62 757	1970

c) Számítsa ki, hogy mennyi volt a játékosok egy lottószelvényre jutó átlagos vesztesége ezen a héten, ha a játékba küldött szelvények egységára 250 Ft! (4 pont)

Megoldás:

a) A 90-nél nem nagyobb pozitív egész számok között 45 db 2-vel osztható van. Ezek közül 3-mal is (tehát 6-tal) osztható 15 db, 5-tel (tehát 10-zel) osztható 9 db. $45-15-9=21$, de így 3-mal és 5-tel is (tehát 30-cal) osztható 3 db számot kétszer vontuk le. Ezért a csak 2-vel oszthatók száma $45-15-9+3=24$. (2 pont)

Hasonlóan: a 90-nél nem nagyobb pozitív egész számok közül 3-mal osztható 30 db, közülük 2-vel is osztható 15 db, 5-tel osztható 6 db, 2-vel és 5-tel is osztható pedig 3 db van, így a csak 3-mal oszthatók száma $30-15-6+3=12$

A 90-nél nem nagyobb pozitív egészek között 5-tel osztható 18 db, közülük 2-vel is osztható 9 db, 3-mal osztható 6 db, 2-vel és 3-mal is osztható pedig 3 db van, így a csak 5-tel oszthatók száma $18-9-6+3=6$. (3 pont)

Összesen tehát $(24+12+6=)$ **42** ilyen szám van. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Mivel a 2, a 3 és az 5 legkisebb közös többszöröse a 30, ezért elég megnézni, hogy 30-ig hány szám rendelkezik a keresett tulajdonsággal. (2 pont)

A megfelelő oszthatóságok ezután periodikusan ismétlődnek, tehát 90-ig háromszor annyi ilyen szám lesz, mint 30-ig. (1 pont)

A 2, a 3 és az 5 közül pontosan az egyikkel osztható számok 1-től 30-ig:
2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 21, 22, 26, 27, és 28. (2 pont)

Ez 14 db, tehát a 90-nél nem nagyobb megfelelő számok száma $(14\cdot 3=)$ **42**

(1 pont)

b) *Lásd: Valószínűségszámítás 56. feladat*

c) *Lásd: Szöveges feladatok 34. feladat*

Összesen: 16 pont

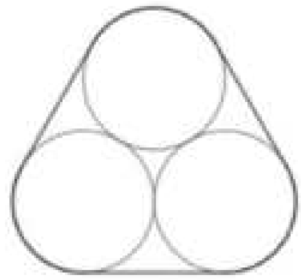
14) Ha András az asztalra ejti a pingponglabdáját, akkor a labda az ejtési magasság kb. 84%-ára pattan vissza. Ezután tovább pattog úgy, hogy minden asztalra érkezés után az előző felpattanás magasságának 84%-áig emelkedik fel.

a) András egy alkalommal (az asztal lapjától mérve) 1 méter magasságból ejtette az asztalra a pingponglabdát. Mekkora utat tesz meg összesen a pingponglabda az első asztalra érkezésétől a tizenötödikig? (Feltételezzük, hogy a labda csak függőleges irányban mozog, a vízszintes irányú elmozdulás elhanyagolható.) (4 pont)

András azt állítja, hogy az összes pingponglabdájának száma 6-tal osztva 2 maradékot, 15-tel osztva pedig 1 maradékot ad.

b) Mutassa meg, hogy András állítása hamis! (3 pont)

Dóri olyan pingponglabda-készletet vásárolt, amelynek dobozába három egyforma labda – az ábrán látható elrendezésben – szorosan belefér. A doboz hengeres test, melynek alaplapját három egybevágó körív és három egyenlő hosszúságú szakasz határolja. (Az ábrán a dobozt felülnézetből látjuk.)



c) A doboz térfogatának hány százalékát tölti ki a három pingponglabda, ha a labdák átmérője 40 mm? (A doboz falvastagsága elhanyagolható.) (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Sorozatok 32. feladat*

b) Az első esetben a labdák száma 3-mal osztva 2-t, a második esetben pedig 1-et ad maradékul. (2 pont)

Ez azonban lehetetlen.

(András állítása tehát valóban hamis.) (1 pont)

c) *Lásd: Térgeometria 35. feladat*

Összesen: 14 pont

15) a) Hány olyan pozitív háromjegyű szám van a tízes számrendszerben, amely a 8 és a 9 számok közül legalább az egyikkel osztható? (7 pont)

b) A 8-cas számrendszerben háromjegyű pozitív egész számok közül véletlenszerűen kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kiválasztott szám a 9-ces számrendszerben is háromjegyű? (7 pont)

Megoldás:

a) A $(13\cdot 8=)104$ a legkisebb, a $(124\cdot 8=)992$ a legnagyobb 8-cal osztható háromjegyű szám, (1 pont)

így összesen $\frac{992-104}{8}+1=112$ darab ilyen szám van. (1 pont)

900 darab háromjegyű szám van, ezért a 9-cel osztható háromjegyű számok száma 100. (1 pont)

A 8-cal és 9-cel osztható számok 72-vel is oszthatók, (1 pont)

ezek száma 12 (legkisebb a $2\cdot 72=144$, legnagyobb a $13\cdot 72=936$). (1 pont)

A 72-vel oszthatókat a 8-cal és a 9-cel oszthatók megszámolásánál is megszámoltuk, így **a keresett számok száma** $112+100-12=\mathbf{200}$. (2 pont)

b) A 8-cas számrendszerben a legkisebb háromjegyű szám $100_8 = 64$, (1 pont)

a legnagyobb $777_8 = (1000_8 - 1 =) 511$, (1 pont)

összesen tehát $511 - 63 = 448$ háromjegyű szám van (összes eset). (1 pont)

(A 8-cas számrendszerben 3 jegyű számokat tekintve) a 9-ces számrendszerben a legkisebb háromjegyű szám $100_9 = 81$, (1 pont)

a legnagyobb (mivel a 8-cas számrendszerben háromjegyű szám nem lehet négyjegyű a 9-ces számrendszerben) az 511. (1 pont)

A kedvező esetek száma tehát $511 - 80 = 431$. (1 pont)

A keresett valószínűség $\frac{431}{448} (\approx 1,962)$. (1 pont)

Alternatív megoldás:

Egy 8-cas számrendszerben háromjegyű szám első számjegye 7-féle, a másik két számjegye 8-8-féle lehet. (2 pont)

Összesen tehát $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$ háromjegyű szám van a 8-cas számrendszerben. (1 pont)

Ezek közül a 9-ces számrendszerben nem háromjegyűek a $(9^2 =) 81$-nél kisebb számok (a többi háromjegyű, mert a 8-as számrendszerben háromjegyű szám nem lehet négyjegyű a 9-es számrendszerben). (1 pont)

Mivel a 8-cas számrendszerben a legkisebb háromjegyű szám a 64, ezért a kedvezőtlen esetek száma $80 - 63 = 17$. (1 pont)

A keresett valószínűség $\frac{431}{448} (\approx 1,962)$. (1 pont)

Összesen: 14 pont

16) Az ókori egyiptomiak az egyenlő szárú háromszög területét (közelítő módszerrel) úgy számolták ki, hogy az alap és a szár szorzatának a felét vették.

a) Egy egyenlő szárú háromszög alapja 18 cm hosszú. Mekkora lehet a szára, ha az ókori egyiptomiak módszere e háromszög valódi területét 25%-nál kisebb hibával adja meg? (9 pont)

Az ókori Egyiptom matematikájában a számok négyzetének is jelentős szerep jutott.

b) Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amellyel az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ számot megszorozva négyzetszámot kapunk? (7 pont)

Megoldás:

a) *Lásd: Síkgeometria 43. feladat*

b) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 (= 5 \cdot 12^2)$ (1 pont)

$k \cdot 6!$ pontosan akkor (pozitív) négyzetszám, ha a prímtényezős felbontásában minden prímszám kitevője páros szám, (1 pont)

ezért k csak $5m^2$ alakú lehet $(k, m \in \mathbb{N}^+)$. (Ekkor $k \cdot 6! = 5 \cdot m^2 \cdot 5 \cdot 12^2 = (60m)^2$.) (2 pont)

Megoldandó az $5m^2 < 1000$ egyenlet. (1 pont)

$m < \sqrt{200} \approx 14,1$, (1 pont)

tehát **14 olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amelyik a feltételeknek megfelel**. (1 pont)

Összesen: 16 pont